Systèmes dynamiques, M1, 2021

Université de Picardie Jules Verne

Systèmes dynamiques (IV)

Prop. : Soit $F \in \mathrm{Homeo}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{R})$.

Alors $\rho(F) = 0 \iff F$ a un point fixe.

dém. : (on avait vu : $\rho(F) = \frac{p}{q} \iff \exists z \in \mathbb{R}$ t.q. $F^q(z) = z + p$.

En prenant $p = 0$ et $q = 1$: $\rho(F) = 0 \iff \exists z \in \mathbb{R}$ t.q. $F(z) = z$)

$\boxed{\Leftarrow}$ facile.

on suppose qu'on est dans ce cas

$\boxed{\Rightarrow}$ Sinon, par contraposition, $\forall z,\ F(z) > z$ (ou $F(z) < z,\ \forall z$).

Par périodicité et par compacité, $\exists \delta > 0$ t.q. $\forall z,\ F(z) \geq z + \delta$.

Donc $F^2(z) - z = \big(F(F(z)) - F(z)\big) + \big(F(z) - z\big)$

$\geq \delta + \delta \geq 2\delta$

(réc.) $\rightsquigarrow \dfrac{F^n(z) - z}{n} \geq \delta$ d'où pour $n \to +\infty$: $\rho(F) \geq \delta$. ∎

Soit $F \in \mathrm{Homeo}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{R})$ t.q. $\rho(F) = 0$.

L'ensemble $\mathrm{Fix}(F) = \{ z \in \mathbb{R} \text{ t.q. } F(z) = z \}$ est fermé et invariant par $T_1 : x \mapsto x+1$.

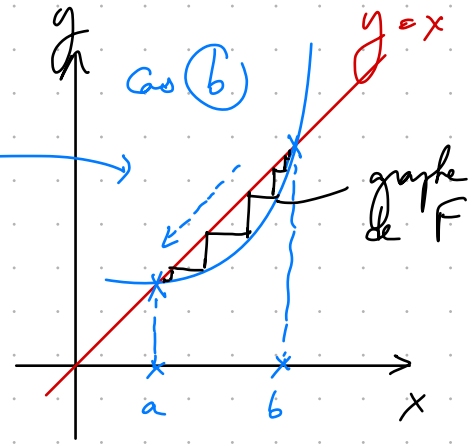
Si $]a,b[$ est une composante connexe de $\mathbb{R} \setminus \mathrm{Fix}(F)$, 2 cas sont possibles selon le signe de $F - \mathrm{id}$ sur $]a,b[$:

(a) si $F - \mathrm{id}\big|_{]a,b[} > 0$, $\forall x \in]a,b[$, $(F^n(x))_{n \in \mathbb{Z}}$ est croissante, et

$$\lim_{n \to -\infty} F^n(x) = a, \quad \lim_{n \to +\infty} F^n(x) = b.$$

(b) si $F - \mathrm{id}\big|_{]a,b[} < 0$, $\forall x \in]a,b[$, $(F^n(x))_n \searrow$, et

$$\lim_{n \to -\infty} F^n(x) = b, \quad \lim_{n \to +\infty} F^n(x) = a.$$



Les points fixes $\mathrm{Fix}(f)$ de f sont les images $\pi(\mathrm{Fix}(F))$ et les ensembles limites $\alpha([x])$, $\omega([x])$ de $[x] \notin \mathrm{Fix}(f)$ sont les extrémités de la composante connexe de $\pi' \setminus \mathrm{Fix}(f)$ contenant $[x]$.

Prop. : Soit $f \in \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{T}^1)$ et $F \in \mathrm{Homeo}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{R})$ relevant f.

$$\left(\pi \circ F = f \circ \pi,\ \pi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z} = \mathbb{T}^1\right)$$

Supposons que $\rho(F) = \frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{Z}$, $q > 0$ et $p \wedge q = 1$.

Alors : 1) $\exists$ une orbite périodique de période q.

2) Toutes les orbites périodiques ont pour période q.

3) $\forall z \in \mathbb{T}^1$, $\alpha(z)$ et $\omega(z)$ sont des orbites périodiques.

dém. :

$$\rho(F) = \frac{p}{q} \rightsquigarrow \rho(F^q - p) = \rho(F^q) - p = q\underbrace{\rho(F)}_{p/q} - p = 0$$

Donc le résultat précédent nous dit que $\underset{\mathrm{Homeo}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{R})}{\underset{\cap}{G}} := F^q - p$ a un point fixe x_0.

Alors $[x_0]$ est un point fixe de f^q car

$$f^q([x_0]) = f^q \circ \pi(x_0) = \pi \circ \underbrace{F^q(x_0)}_{x_0 + p} = \pi(x_0) + \pi(p) = [x_0].$$

De plus tout point fixe de f^q est la projection d'un point fixe de G.

$\left(f^q([x]) = [x] \implies [x] = \pi(x),\ G(x) = x \right.$ car en raison du nombre de rotation nul $\left.\right)$

Si $\pi(x) \in \mathbb{T}^1$ est un point périodique de période q' pour f,

$\exists\, p' \in \mathbb{Z}$ t.q. $F^{q'}(x) = x + p'$.

Alors $F^{qq'}(x) = x + qp'$ (car $F(y+1) = F(y) + 1,\ \forall y \in \mathbb{R}$)

ce qui implique $\rho\left(F^{qq'} - qp'\right) = 0$.

Mais $\rho\left(F^{qq'} - qp'\right) = \rho\left(F^{qq'}\right) - qp' = qq' \times \frac{p}{q} - qp' = q'p - qp'$

d'où $q'p = qp'$, et alors, $\exists\, r \geq 1$ t.q. $q' = rq$ et $p' = rp$.

Donc $\underbrace{(F^q - p)}_{G}{}^r(x) = x$, et x est un point périodique de période r pour G.

C'est donc un point fixe d'après ce qui précède, et $r = 1$.

On a donc montré 1) et 2).

Il reste à montrer 3).

On considère $G = F^q - p$ (avec $\rho(G) = 0$)

et $g : \mathbb{T}^1 \longrightarrow \mathbb{T}^1$ l'homéo. associé $\left(g \circ \pi = \underbrace{\pi \circ G}_{\pi \circ F^q} \right)$

D'après ce qui précède, $\forall [x] \in \mathbb{T}^1$, $\exists [y] \in \mathbb{T}^1$ point fixe de g t.q.

$$\lim_{k \to +\infty} g^k([x]) = [y]$$

$\rightsquigarrow$ c'est un point périodique de f, de période q, et son orbite est égale à $\omega_f([x])$.

On montre de même que $\alpha([x])$ est une orbite périodique de f. $\blacksquare$

Cas irrationnel

Retour sur les rotations de $\mathbb{T}^1$

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $[a] = a + \mathbb{Z} \in \mathbb{T}^1$.

La rotation $r_a : x \longmapsto x + a$ relève la rotation $r_{[a]} : [x] \mapsto [x+a]$
(translation)

Prop. : Si $a = \frac{p}{q}$ est rationnel, $\underset{q>0}{p \wedge q} = 1$, alors tout point $[x] \in \mathbb{T}^1$ est un point périodique de $r_{[a]}$, de période q.

(*) **Prop. :** Si a est irrationnel, alors $r_{[a]}$ est $\left\{\begin{array}{l}\text{positivement} \\ \text{négativement}\end{array}\right.$ minimale.

On commence par montrer

Lemme : l'ensemble $\mathbb{Z} + a\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

dém : $\mathbb{Z} + a\mathbb{Z}$ est un sous-groupe de $\mathbb{R}$.

Supposons que $\mathbb{Z} + a\mathbb{Z}$ n'est pas dense : on pose $\varepsilon_0 = \inf\left(\left(\mathbb{Z}+a\mathbb{Z}\right) \cap \left]0, +\infty\right[\right)$

($\neq 0$ si $\mathbb{Z} + a\mathbb{Z}$ pas dense)

Il existe au plus un point de $\mathbb{Z} + a\mathbb{Z}$ dans $\left[\varepsilon_0, 2\varepsilon_0\right[$.

(sinon la différence de $z, z' \in \left[\varepsilon_0, 2\varepsilon_0\right[\cap (\mathbb{Z}+a\mathbb{Z})$ donne un nombre dans $\mathbb{Z}+a\mathbb{Z} \cap \left[0, \varepsilon_0\right[$)

Donc $\varepsilon_0 \in \mathbb{Z} + a\mathbb{Z}$.

Clairement, $\varepsilon_0 \mathbb{Z} \subset \mathbb{Z} + a\mathbb{Z}$.

On peut écrire : $1 = q\varepsilon_0 + r$ avec $p, q \in \mathbb{Z}$

$a = p\varepsilon_0 + r'$ $\quad r, r' \in \left[0, \varepsilon_0\right[$

$\rightsquigarrow$ $1 - q\varepsilon_0 = r \in \mathbb{Z} + a\mathbb{Z}$ et $0 \leq r, r' < \varepsilon_0$ donc $r = r' = 0$

$a - p\varepsilon_0 = r' \in \mathbb{Z} + a\mathbb{Z}$ $\quad$ et $1 = q\varepsilon_0$, $a = p\varepsilon_0$

donc $\forall\ z = m + na \in \mathbb{Z} + a\mathbb{Z}$,

$$z = m(q\varepsilon_0) + n(p\varepsilon_0) = (mq + np)\varepsilon_0 \in \varepsilon_0\mathbb{Z}$$

donc $\mathbb{Z} + a\mathbb{Z} = \varepsilon_0\mathbb{Z}$.

En particulier, $a = p\varepsilon_0$ et $1 = q\varepsilon_0 \Rightarrow a = \frac{p\varepsilon_0}{q\varepsilon_0} = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, absurde. ■

En fait, on a :

Lemme : l'ensemble $\mathbb{Z} + a\mathbb{N}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

On peut alors conclure la dém. de la proposition (*) :

dém. : fixons $[x] \in \mathbb{T}^1$. On a $[x] = x + \mathbb{Z}$, $x \in \mathbb{R}$.

L'orbite positive $\mathcal{O}^+_{r_{[a]}}([x])$ de $[x]$ par la rotation $r_{[a]}$ est la projection

$$\pi\left(\mathcal{O}^+_{r_a}(x)\right)$$ de l'orbite positive de x par r_a.

Mais $\mathcal{O}^+_{r_a}(x) = \{ r_a^n(x) \ , \ n \geq 0 \}$

$$= \{ x + na \ , \ n \geq 0 \}$$

$$= x + \mathbb{N} a$$

donc $\mathcal{O}^+_{r_{[a]}}([x]) = \pi\Big(\underbrace{x + \mathbb{Z} + a\mathbb{N}}_{\text{dense dans } \mathbb{R}}\Big)$ dense dans $\mathbb{T}^1$

donc $\forall [x] \in \mathbb{T}^1$, $\mathcal{O}^+_{r_{[a]}}([x])$ est dense dans $\mathbb{T}^1$.

$r_{[a]}$ est positivement minimale. $\blacksquare$

Question : si $\rho(F) = \alpha \notin \mathbb{Q}$, $F \in \mathrm{Homeo}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{R})$, est-ce que $f \in \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{T}^1)$ $(\pi \circ F = f \circ \pi)$ est conjugué à la rotation $r_{[\alpha]}$?

Théorème : Soit $f \in \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{T}^1)$ t.q. $[\alpha] = \rho(f) \notin \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

Alors il existe une semi-conjugaison $h : \mathbb{T}^1 \longrightarrow \mathbb{T}^1$, h continue de degré 1, t.q. $r_{[\alpha]} \circ h = h \circ f$,

i.e.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{T}^1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \mathbb{T}^1 \arrow[d, "h"] \\ \mathbb{T}^1 \arrow[r, "r_{[\alpha]}"'] & \mathbb{T}^1 \end{tikzcd}$$

Commute.

Dém : Soit $F \in \mathrm{Homeo}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{R})$ qui relève f $(\pi \circ F = f \circ \pi)$.

Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, et on pose $Z = \{F^q(x_0) + p \mid p, q \in \mathbb{Z}\}$.

$$= \pi^{-1}\left(\mathcal{O}_f([x_0])\right).$$

On pose $Z' = \{q\alpha + p \mid p, q \in \mathbb{Z}\}$

$$= \pi^{-1}\left(\mathcal{O}_{r_{[\alpha]}}([0])\right).$$

Comme $\alpha \notin \mathbb{Q}$, $\underset{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}{\underset{\cap}{(p,q)}} \overset{c'}{\longmapsto} q\alpha + p$ est injective.

De même, $\underset{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}{\underset{\cap}{(p,q)}} \overset{c}{\longmapsto} F^q(x_0) + p$ est injective.

(car f n'a pas de point périodique car $\alpha \notin \mathbb{Q}$)

On pose $H := c' \circ c^{-1} : Z \longrightarrow Z'$.

Lemme : $H : Z \to Z'$ est strictement croissante. ($\Leftrightarrow H^{-1}$ est strictement croissante)

dém : Soit $p, q, p', q' \in \mathbb{Z}$ t.q. $q\alpha + p < q'\alpha + p'$. $(*)$

On veut m.q. $\underbrace{F^q(x_0) + p}_{H^{-1}(q\alpha+p)} < \underbrace{F^{q'}(x_0) + p'}_{H^{-1}q'\alpha+p'}$.

On a $(*) \Rightarrow (q - q')\alpha < p' - p$. $(**)$

- Si $q = q'$ alors $p < p'$ et $F^q(x_0) + p < F^{q'}(x_0) + p'$ ✓

- Sinon, supposons que $q > q'$ (l'autre cas est analogue).

(**) $\Rightarrow \alpha < \dfrac{p'-p}{q-q'}$.

(les points tournent moins vite que $\dfrac{p'-p}{q-q'}$)

$\rightsquigarrow \forall z' \in \mathbb{R}, \quad F^{q-q'}(z') < z' + (p'-p)$ (cf. cours précédent)

Pour $z' = F^{q'}(x_0)$, on obtient :

$$F^{q-q'}\left(F^{q'}(x_0)\right) = F^{q}(x_0) < F^{q'}(x_0) + p' - p$$

d'où $F^{q}(x_0) + p < F^{q'}(x_0) + p'$. ✓

$\blacksquare$

On a $F(Z) = Z$ et $r_\alpha(Z') = Z'$, et

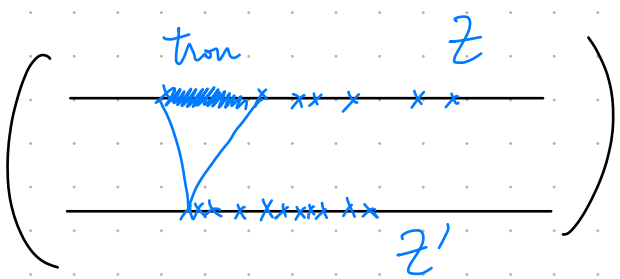
$$H \circ F = r_\alpha \circ H \text{ sur } Z. \quad (\circ)$$

$$\left(H \circ F(F^q(x_0) + p) = H(F^{q+1}(x_0) + p) = (q+1)\alpha + p = (q\alpha + p) + \alpha = r_\alpha \circ H(F^q(x_0) + p) \right)$$

- $H : Z \to Z'$ et Z' est dense dans $\mathbb{R}$ $(\alpha \notin \mathbb{Q})$

Il existe une unique façon d'étendre H en une application ~~(strictement)~~ croissante :

$\forall x \notin Z$, on pose $H(x) = \sup \{ H(z) \mid z \in Z \text{ et } z < x \}$.



$$\left(= \inf \{ H(z) \mid z \in Z \text{ et } z > x \} \right.$$
$$\left. \text{car } Z' \text{ est dense dans } \mathbb{R} \right)$$

$\rightsquigarrow$ Cela définit $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Cette application est croissante d'image dense donc H est continue et $H(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

De plus, la relation $(\bullet)$ ci-dessus nous donne :

$$H \circ F = r_\alpha \circ H \quad \text{sur } \mathbb{R}$$

De même, $H \circ T_1 = T_1 \circ H$ sur $\mathbb{Z}$ $\left(T_1 : x \mapsto x+1\right)$

$$\Longrightarrow \quad H \circ T_1 = T_1 \circ H \quad \text{sur } \mathbb{R}$$

Conclusion : H induit une application $h : \mathbb{T}^1 \to \mathbb{T}^1$ qui donne une semi-conjugaison entre f et $r_{[\alpha]}$.

avec $\pi \circ H = h \circ \pi$

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{R} \arrow[rr, "F"] \arrow[dl, "H"'] \arrow[dd, "\pi"] & & \mathbb{R} \arrow[dl, "H"'] \arrow[dd, "\pi"] \\
\mathbb{R} \arrow[rr, "r_\alpha"'] \arrow[dd, "\pi"'] & & \mathbb{R} \arrow[dd, "\pi"] & \\
 & \mathbb{T}^1 \arrow[rr, "f"] \arrow[dl, "h"] & & \mathbb{T}^1 \arrow[dl, "h"] \\
\mathbb{T}^1 \arrow[rr, "r_{[\alpha]}"'] & & \mathbb{T}^1 &
\end{tikzcd}$$

(cube commutatif)

$\blacksquare$

Remarque : Si h n'est pas un homéo. (i.e. non injectif), il existe $[x] \in \mathbb{T}^1$ t.q. $h^{-1}([x])$ n'est pas un singleton.

Comme H est croissante, $h^{-1}([x])$ est connexe donc c'est un intervalle I non-trivial du cercle $\mathbb{T}^1$.

Par la semi-conjugaison, les images $\{f^q(I), q \in \mathbb{Z}\}$ sont des intervalles 2 à 2 disjoints ; en particulier l'intervalle I est errant, et l'application f n'est pas transitive.

Corollaire : Si $\rho(f) \notin \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ alors f est transitif $\iff$ f est minimal

$\rho(f) = [\alpha] \in \mathbb{T}^1$

$\iff$ f est conjugué à $r_{[\alpha]}$

(f minimal : toute orbite est dense $\Rightarrow$ f est transitif

et f transitif $\iff$ h est un homéo., i.e. f et $r_{[\alpha]}$ sont conjugués

Contraposition de ce qui précède

$\Rightarrow$ f est minimal)

minimale

Prop : Soit $f \in \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{T}^1)$, $\rho(f) = [\alpha]$, $\alpha \notin \mathbb{Q}$.

Supposons que f n'est pas minimal. Alors il existe une unique partie $X \subset \mathbb{T}^1$ fermée, non-vide, invariante par f et minimale pour l'inclusion.

On a :

1) $X = \Omega(f)$ ensemble des points non-errants de f

2) $\forall x \in \mathbb{T}^1$, $\omega(x) = X$.

3) X est un ensemble de Cantor (ensemble compact de $\mathbb{T}^1$, sans point isolé et totalement discontinu).

Question : est-ce qu'il existe de tels homéos ?
(nombre de rotation irrationnel mais pas conjugué à une rotation)

La réponse est **oui** : exemples construits par Denjoy :

Prop. : (Denjoy)

Il existe $f \in \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{T}^1)$ t.q. $\rho(f) \notin \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ mais f pas conjugué à $r_{[\alpha]}$ avec $[\alpha] = \rho(f)$.

(On peut même avoir f difféomorphisme de classe C^1).

Mais cette situation ne se produit pas quand f est assez régulier :

Théorème : (Denjoy)

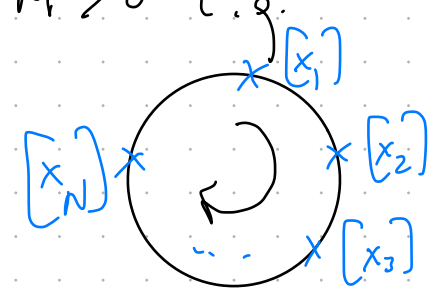
Soit $f \in \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{T}^1)$ de classe C^2 (ou plus généralement f C^1 et f' à variations bornées)

et $\rho(f) = [\alpha] \notin \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, alors f est conjugué à la rotation $r_{[\alpha]}$.

($\Rightarrow f$ minimal)

Déf. : $\phi : \mathbb{T}^1 \to \mathbb{R}$ est à variations bornées (VB) si $\exists M > 0$ t.q. $\forall [x_1], \dots, [x_N] \in \mathbb{T}^1$ cycliquement ordonnés

$$\sum_{i=1}^{N} \left| \phi([x_{i+1}]) - \phi([x_i]) \right| < M. \quad (*)$$



On note $VB(\phi) := \inf\{M > 0 \text{ qui marche dans } (*)\}$.

Exercice : • ϕ $C^1 \Rightarrow \phi$ est à variations bornées (VB)

$C^0 \not\Rightarrow VB$.

• $\phi : \mathbb{T}^1 \to \mathbb{R}$ continue et VB

$\psi : \Omega \to \mathbb{R}$ avec $\Omega \supset \phi(\mathbb{T}^1)$ ouvert, avec ψ C^1.

Alors $\psi \circ \phi : \mathbb{T}^1 \to \mathbb{R}$ est VB.

(En particulier, pour $f \in \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{T}^1)$, f C^1,

si f' est VB, alors $\log(f')$ est VB).

dém. du thm de Denjoy : $f \in \mathrm{Homeo}_+(\mathbb{T}^1)$, f C^1 et f' VB.

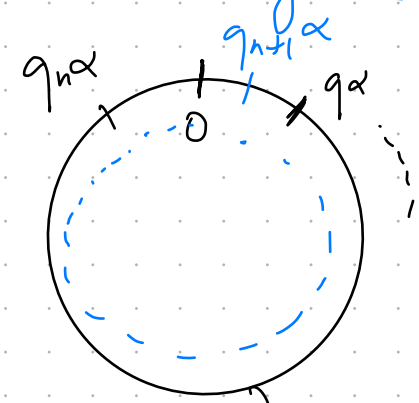
$\rho(f) = [\alpha] \notin \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

- remarque : f est conjugué à $r_{[\alpha]} \iff f$ n'a pas d'intervalle I errant.

Lemme : $\exists\, (q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite $\nearrow\nearrow$ dans $\mathbb{N}$ t.q. $\forall [x] \in \mathbb{T}^1$, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$\exists\, I_{q_n} \subset \mathbb{T}^1$ intervalle de $\mathbb{T}^1$ de $[x]$ à $f^{q_n}([x])$ t.q.

$I_{q_n}, f(I_{q_n}), \dots, f^{q_n-1}(I_{q_n})$ sont 2 à 2 d'intérieurs disjoints.



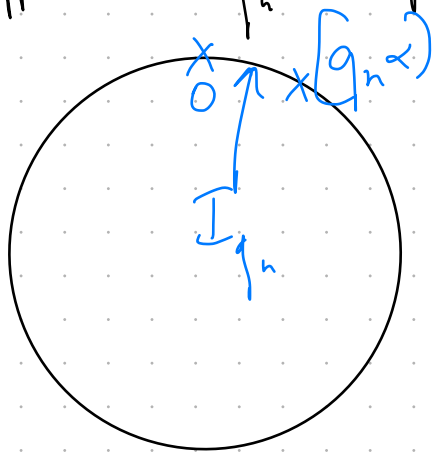
dém. : on suppose d'abord $f = r_{[\alpha]}$, $[x] = 0$.

On définit (q_n) par récurrence : $q_0 = 1$,

et $q_{n+1} = \min\{ q > q_n \text{ t.q. } d(q\alpha, 0) < d(q_n\alpha, 0) \}$.

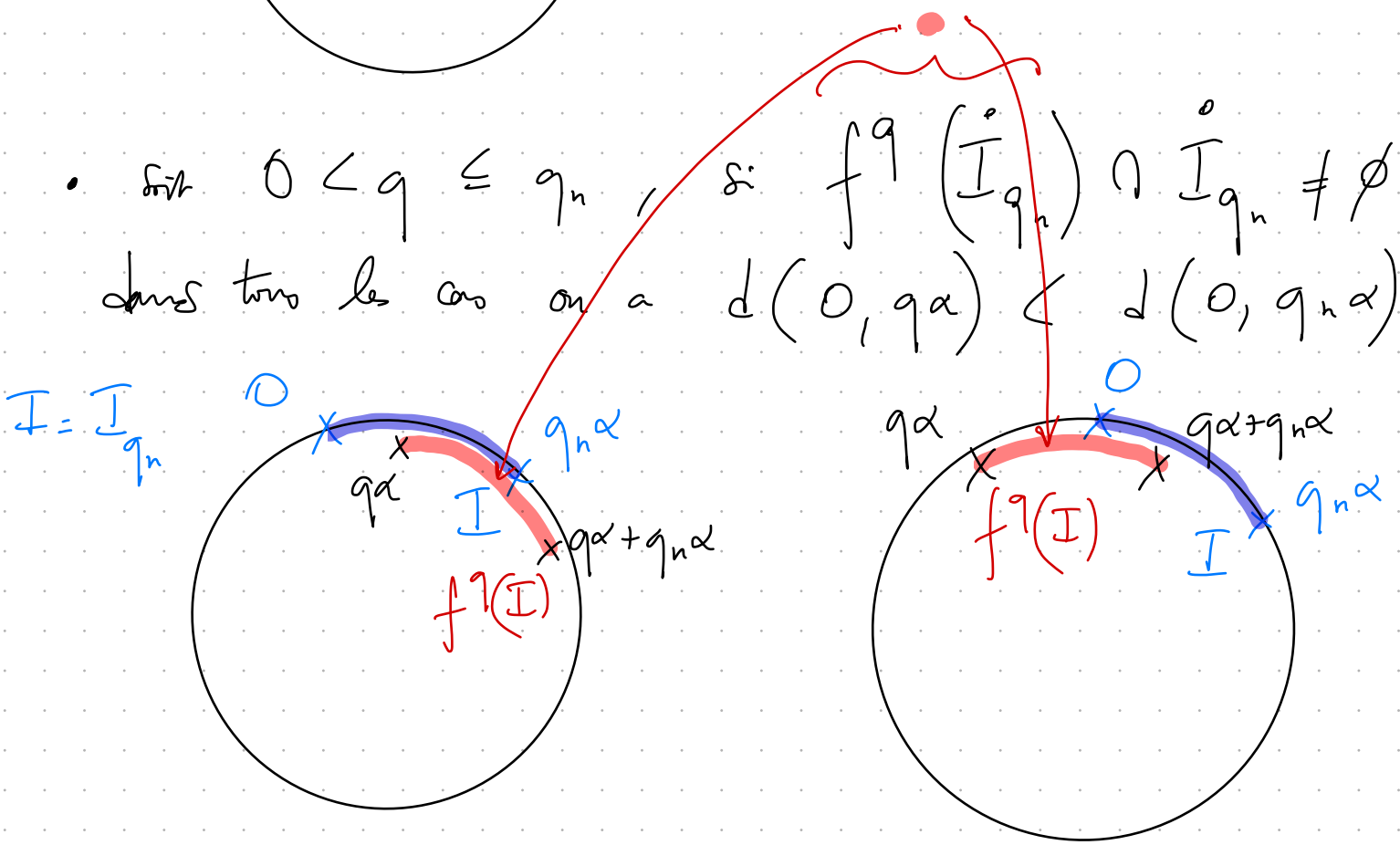
On a : $\forall q \in \{1, \dots, q_n - 1\}$, $d([q\alpha], 0) > d([q_n\alpha], 0)$.

On appelle I_{q_n} le plus petit des deux intervalles de 0 à $[q_n\alpha]$.



$$I = I_{q_n}$$

- Soit $0 < q \leq q_n$, si $f^q(\mathring{I}_{q_n}) \cap \mathring{I}_{q_n} \neq \emptyset$, alors dans tous les cas on a $d(0, q\alpha) < d(0, q_n\alpha)$: absurde



- si $f^{q}(\mathring{I}) \cap f^{q'}(\mathring{I}) \neq \emptyset$ avec $0 \leq q < q' \leq q_n$,

  donc $\mathring{I} \cap f^{q'-q}(\mathring{I}) \neq \emptyset$ et $0 < q'-q \leq q_n$: pas possible d'après ce qui précède.

  f^{-q}

- le cas général (quand f n'est pas une rotation) se déduit en utilisant la semi-conjugaison : $I'_{q_n} := h^{-1}\left(I_{q_n} + [x]\right)$.

Lemme : Il existe $C > 0$ t.q. $\forall [x] \in \mathbb{T}^1$, $\forall n \geq 0$,

$$\frac{1}{C} \leq \left(f^{q_n}\right)'([x]) \cdot \left(f^{-q_n}\right)'([x]) < C. \qquad (*)$$

dém. : Soit $M = VB(\log(f'))$.

D'après la déf. des intervalles I_{q_n}, les int. $\mathring{I}_{q_n}, f(\mathring{I}_{q_n}), \dots, f^{q_n-1}(\mathring{I}_{q_n})$ sont 2 à 2 disjoints.

Pour $[x] \in I_{q_n}$,

on a $$\underbrace{\sum_{i=0}^{q_n-1} \left| \log f'(f^i([x])) - \log f'(f^{q_n+i}([x])) \right|}_{S} < M.$$

On a $$M > S \geq \left| -\underbrace{\sum_{i=0}^{q_n-1} \log f'(f^i([x]))}_{\log \prod_{i=0}^{q_n-1} f'(f^i([x]))} + \underbrace{\sum_{i=0}^{q_n-1} \log f'(f^{q_n+i}([x]))}_{\log \prod_{i=0}^{q_n-1} f'(f^{q_n+i}([x]))} \right|$$

inég. triang.

règle de la chaîne

$$\underbrace{\prod_{i=0}^{q_n-1} f'(f^i([x]))}_{(f^{q_n})'([x])} \qquad \underbrace{\prod_{i=0}^{q_n-1} f'(f^{q_n+i}([x]))}_{(f^{q_n})'(f^{q_n}([x]))}$$

$$[x] \xrightarrow{f} f([x]) \xrightarrow{f} \cdots \xrightarrow{f} f^{q_n}([x])$$

(dérivée de f^{q_n} = produit des dérivées f' le long de l'orbite)

$$\rightsquigarrow \quad M > S \geqslant \left| -\log (f^{q_n})'([x]) + \log (f^{q_n})'(f^{q_n}([x])) \right|$$

$$= \left| \log \left(\frac{(f^{q_n})'(f^{q_n}([x]))}{(f^{q_n})'([x])} \right) \right| = \left| \log (f^{q_n})'(f^{q_n}([x])) \times (f^{-q_n})'(f^{q_n}([x])) \right|$$

d'où en passant à l'exponentielle,

$$e^{-M} < (f^{q_n})'(f^{q_n}([x])) \times (f^{-q_n})'(f^{q_n}([x])) < e^{M}$$

On obtient le résultat pour $[y] = f^{q_n}([x])$. ∎

On va à présent conclure la preuve du théorème de Denjoy.

$\rightsquigarrow$ Supposons qu'il existe un intervalle errant $J \subset \mathbb{T}^1$ non trivial. $(\mathrm{Leb}(J) > 0)$

Alors on a $\lim_{n \to \pm\infty} \text{Leb}\left(f^n(J)\right) = 0$.

En effet, $\underbrace{\text{Leb}\left(\bigsqcup_n f^n(J)\right)}_{<+\infty \text{ car } \subset \mathbb{T}^1 \text{ et } \text{Leb}(\mathbb{T}^1) = 1} \underset{J \text{ est borné}}{=} \sum_n \text{Leb}\left(f^n(J)\right)$

donc $\sum_n \text{Leb}\left(f^n(J)\right)$ CV donc $\text{Leb}\left(f^n(J)\right) \xrightarrow[\pm\infty]{} 0$.

Or $\text{Leb}\left(f^{q_n}(J)\right) = \int_J \left(f^{q_n}\right)'([x])\, d\text{Leb}$

d'où $\int_J \Big[\underbrace{\left(f^{q_n}\right)'([x])}_{a_n = a_n([x])} + \underbrace{\left(f^{-q_n}\right)'([x])}_{b_n = b_n([x])}\Big]\, d\text{Leb} \xrightarrow[n \to \pm\infty]{} 0$

On a toujours $a_n + b_n \geq \sqrt{2 a_n b_n}$ $\leftarrow \left((a_n + b_n)^2 = \underbrace{(a_n^2 + b_n^2)}_{\geq 0} + 2a_n b_n\right)$

Mais d'après $(*)$ (lemme préc.) on a $\frac{1}{C} < a_n b_n < C$

donc $\underbrace{\int_J a_n([x]) + b_n([x]) \, d\mathrm{leb}}_{\geq \sqrt{2} \int_J \underbrace{\sqrt{a_n([x])\, b_n([x])}}_{> \frac{1}{\sqrt{C}}} \, d\mathrm{leb}} \xrightarrow[n \to \pm\infty]{} 0$ d'après ce qui précède

$$= \sqrt{\frac{2}{C}} \times \int_J d\mathrm{leb} = \sqrt{\frac{2}{C}} \times \mathrm{leb}(J)$$

donc par le théorème des gendarmes, $\sqrt{\frac{2}{C}} \times \mathrm{leb}(J) \xrightarrow[n \to \pm\infty]{} 0$

i.e. $\mathrm{leb}(J) = 0$: absurde

car J était un intervalle

ouvert non trivial. ∎